Jurnal Barekeng
Vol. 8 No. 1 Hal. 1 – 6 (2014)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

ANALISIS ENTROPI DARI TRANSFORMASI MENGAWETKAN UKURAN DAN SIFAT-SIFATNYA

Analysis of Entropi of a Measure-Preserving Transformation and Properties

DORTEUS LODEWYIK RAHAKBAUW[1], HENRY J. WATTIMANELA[2]

[1,2] *Staf Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura*

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

E-mail: [1]lodewyik@gmail.com

ABSTRAK

Transformasi $T : X_1 \rightarrow X_2$ merupakantransformasiterinvers yang mengawetkan ukuran jika T mengawetkan ukuran, bijektif, and T^{-1} juga menawetkan ukuran. Transformasi yang mengawetkan ukuran merupakan pemetaan yang mengawetkan struktur antara ruang ukuran. Pada sisi lain, $T : X \rightarrow X$ merupakan transformasi yang mengawetkan ukuran dari ruang probabilitas $(X, \mathscr{B}, m)$. Jika $\mathscr{A}$ adalah aljabar bagian berhingga σ dari $\mathscr{B}$ maka $h(T, \xi(\mathscr{A})) = h(T, \mathscr{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}\right) T^{-i}\mathscr{A}$ disebut entropi dari T terhadap $\mathscr{A}$. Jika $T : X \rightarrow X$ merupakan transformasi yang mengawetkan ukuran dari ruang probabilitas $(X, \mathscr{B}, m)$ maka $h(T) = \sup h(T, \mathscr{A})$ dimana suprimum diambil atas semua aljabar bagian berhingga $\mathscr{A}$ dari $\mathscr{B}$ disebut entropi dari *T*. Dalam penelitian ini akan ditunjukkan bahwa limit di atas selalu ada dan menjelaskan mengenai beberapa sifat dari $h(T, \mathscr{A})$ dan $h(T)$.

Kata kunci: *Transformasi, entropi, mengawetkan ukuran, ruang probabilitas*

PENDAHULUAN

Perkataan entropi sebagai konsep ilmiah pertama kali digunakan dalam termodinamika (Clausius, 1850). Interpretasinya Dalam konteks mekanika statis dikemukakan oleh Boltzman 1877, tetapi hubungan eksplisit antara entropi dan probabilitas dicatat beberapa tahun kemudian (Planck, 1906). Shannon dalam makalahnya pada tahun 1948, menggunakan konsep entropi untuk memberikan diskripsi ekonomis sifat-sifat barisan simbol yang panjang, dan menggunakan hasilnya pada sejumlah persoalan dasar dalam teori sandi dan pengiriman data. Sumbangannya yang luar biasa ini membentuk dasar teori informasi modern. Jaynes pada tahun 1957 melihat kembali metode entropi maksimum dan menggunakannya untuk berbagai persoalan yang menyangkut penentuan parameter tak diketahui dari data tak lengkap. Pada tahun 1958 oleh Kolmogorov, ia memperkenalkan konsep entropi melalui teori Ergodik. Secara umum Teori Ergodik merupakan teori yang digunakan untuk menjelaskan kejadian dalam ruang ukuran (*measure space*), bahkan teori ini merupakan invarian tersukses sampai saat ini. Misalnya, pada tahun 1943 diketahui bahwa pergeseran dua sisi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dan tiga sisi $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ merupakan spektrum Lebesque terbilang dan itu merupakan spektrum isomorfik, namun tidak diketahui apakah merupakan konjugasi. Hal ini dipecahkan tahun 1958 ketika Kolmogorov menunjukkan bahwa keduanya memiliki entropi log 2 dan log 3, sebaliknya, bukan merupakan konjugat. Gagasan entropi yang saat ini digunakan hanya berbeda tipis dari yang digunakan oleh Kolmogorov, perbaikannya dibuat Sinai pada tahun 1959.

Kata Ergodik dikemukakan oleh Boltzman untuk menggambarkan tentang kejadian dari $\{T_t | t \in R\}$ pada permukaan energi $H^{-1}(e)$ dimana Hamiltonian H adalah model yang timbul dari statistika mekanik. Boltzman mengharapkan bahwa masing-masing orbit $\{T_t(x) | x \in R\}$ akan sama dengan seluruh permukaan $H^{-1}(e)$, pernyataan ini disebut hipotesis Ergodik. Kata Ergodik berasal dari bahasa Yunani yaitu *ergon* (kerja) dan *odos* (lintasan).

Secara umum teori Ergodik digunakan hanya untuk memberi gambaran studi kualitatif kejadian dari grup/kelompok dalam ruang ukuran. Kejadian pada ruang topologi dan bermacam-macam perataan seringkali disebut topologi dinamik dan diferensial dinamik. Studi teori ukuran ini dimulai sebelum tahun 1930 dan teorema Ergodik Birkhoff dan Von Neumann yang dibuktikan pada waktu itu. Selanjutnya kemajuan yang lebih besar, yaitu penemuan konsep entropi oleh Kolmogorov pada tahun 1958. Pembuktiannya oleh Ornstein pada tahun 1969, berupa entropi lengkap untuk pergeseran Bernoulli yang timbul lagi dalam masalah isomorfis. Tahun belakangan ini Teori Ergodik memiliki beberapa kegunaan yang memberikan hasil penting dalam berbagai cabang matematika.

Berdasarkan hal ini maka peneliti tertarik untuk mendalami, menganalisis, dan membahas secara mendetil mengenai konsep entropi yaitu entropi dari transformasi mengawetkan ukuran dan sifat-sifatnya.

TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan $S=-k\sum_{i=1}^{N}\left(P_i \log P_i\right)$ merupakan persamaan generalisasi terhadap definisi entropi dalam statistika mekanik dimana persamaan dimaksud pertama kali dikemukakan oleh Boltzman pada tahun 1800-an (Tolman, 2001). Pada Tahun 1958 Kolmogorov memperkenalkan suatu konsep entropi dalam Teori Ergodik yang juga merupakan entropi dalam statistika mekanik dengan menggunakan gagasan teori ruang ukuran sebagai konsep dasar (Weisstein, 1999). Selanjutnya dalam perkembangan analisis abstrak dan perluasannya dalam statistika, entropi menjadi objek yang menarik untuk dipelajari dan dikembangkan sebab pengambilan pendefinisian partisi dan aljabar dalam ruang probabilitas dapat dibentuk suatu bilangan yang disebut entropi partisi (Walters, 1975), dimana secara teoritis pendefinisian ruang probabilitas sendiri merupakan generalisasi dari definisi ruang ukuran (Kingman dan Taylor, 1966) dan entropi partisi sendiri merupakan generalisasi dari persamaan di atas. Dalam bukunya yang berjudul *An Introduction to Ergodic Theory with 8 Illustrations*, Walters (1975) mencoba menyusun suatu konsep entropi dengan langkah awal mendefinisikan terlebih dahulu ruang probabilitas yang menghasilkan transformasi dalam ruang probabilitas sehingga dapat dibentuk definisi entropi dari transformasi mengawetkan ukuran.

Definisi 1.
Andaikan $T: X\to X$ adalah transformasi yang mengawetkan ukuran dari ruang probabilitas $(X,\mathscr{B},m)$, dan jika $\mathscr{A}$ adalah aljabar bagian-σ berhingga dari $\mathscr{B}$ maka $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)$ selalu ada, dan

$$h(T,\mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

Teorema A.
Diberikan $(X,\mathscr{B},m)$ ruang probabilitas dan $\mathscr{A},\mathscr{F}$ merupakan aljabar bagian-σ atas $\mathscr{B}$ dengan $\mathscr{A}$ berhingga maka

i. $H(\mathscr{A}|\mathscr{F})=0\Leftrightarrow \mathscr{A}\overset{\circ}{\subset}\mathscr{F}$

ii. $H(\mathscr{A}|\mathscr{F})=H(\mathscr{A})\Leftrightarrow \mathscr{A}$ dan $\mathscr{F}$ independen

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1.
Andaikan $\mathscr{A},\mathscr{C}$ adalah sub-aljabar berhingga dari $\mathscr{B}$ dan T adalah transformasi mengawetkan ukuran dari ruang probabilitas $(X,\mathscr{B},m)$, maka

i. $h(T,\mathscr{A})\le H(\mathscr{A})$.

ii. $h(T,\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\le h(T,\mathscr{A})+h(T,\mathscr{B})$

iii. $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{B}\Rightarrow h(T,\mathscr{A})\le h(T,\mathscr{B})$

iv. $h(T,\mathscr{A})\le h(T,\mathscr{B})+h(\mathscr{A}/\mathscr{B})$

v. $h(T,T^{-1}\mathscr{A})=h(T,\mathscr{A})$.

vi. Jika $k\ge 1, h(T,\mathscr{A})=h(T,\vee_{i=0}^{k-1}T^{-i}\mathscr{A})$.

vii. Jika T terinvers dan $k\ge 1$ maka

$$h(T,\mathscr{A})=h\left(T,\bigvee_{i=-k}^{k}T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

Bukti:

i. Akan ditunjukkan $h(T,\mathscr{A})\le H(\mathscr{A})$

Bukti:
dari definisi 1 diketahui

$$h(T,\mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

berarti

$$H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)=H\left(\mathscr{A}\vee T^{-1}\mathscr{A}\vee\ldots\vee T^{-(n-1)}\mathscr{A}\right)$$

karena

$$H(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\le H(\mathscr{A})+H(\mathscr{B}),$$

maka

$$\begin{aligned}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)&=H(\mathscr{A})+H\left(T^{-1}\mathscr{A}\right)+\ldots+H\left(T^{-(n-1)}\mathscr{A}\right)\\&\le H(\mathscr{A})+H(\mathscr{A})+\ldots+H(\mathscr{A})\\&\le nH(\mathscr{A})\end{aligned}$$

Berarti

$$\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)\le\frac{1}{n}nH(\mathscr{A})=H(\mathscr{A})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)\le\lim_{n\to\infty}H(\mathscr{A})$$

$$h(T,\mathscr{A})\le H(\mathscr{A}) \qquad \blacksquare$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa

$$h(T,\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\le h(T,\mathscr{A})+h(T,\mathscr{B})$$

Bukti:
Berdasarkan definisi 1

$$h(T,\mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

sehingga

$$h(T,\mathscr{A}\vee\mathscr{B})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\right),$$

berarti

$$\begin{aligned}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\right)&=H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\vee\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)\\&\le H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)+H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\right)&\le\lim_{n\to\infty}\left(H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)+H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)+\lim_{n\to\infty}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore h(T,\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\le h(T,\mathscr{A})+h(T,\mathscr{B}) \qquad \blacksquare$$

iii. Akan ditunjukkan bahwa

$$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{B}\Rightarrow h(T,\mathscr{A})\le h(T,\mathscr{B})$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\subseteq\mathscr{B}\Rightarrow T^{-i},\mathscr{A}&\subseteq T^{-i},\mathscr{B}\\T^{-1}(T^{-1},\mathscr{A})&\subseteq T^{-1}(T^{-1},\mathscr{B})\\T^{-2}(\mathscr{A})&\subseteq T^{-2}(T\mathscr{B})\\&\vdots\\T^{-(n-1)}(\mathscr{A})&\subseteq T^{-(n-1)}(\mathscr{B})\end{aligned}$$

Jadi

$$\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\subseteq\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}$$

Karena

$$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{B}\Rightarrow H(\mathscr{A})\le H(\mathscr{B}),$$

maka

$$H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)\le H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)$$

$$h(T,\mathscr{A})\le h(T,\mathscr{B}) \qquad \blacksquare$$

Dengan demikian

$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{B}\Rightarrow h(T,\mathscr{A})\le h(T,\mathscr{B})$ terbukti.

iv. Akan ditunjukkan

$$h(T,\mathscr{A})\le h(T,\mathscr{B})+h(\mathscr{A}/\mathscr{B})$$

Bukti:
Diketahui hubungan

$$H(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})=H(\mathscr{A})+H(\mathscr{A}|\mathscr{B}),$$

berarti

$$H(\mathscr{A})\le H(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}),$$

selanjutnya

$$\begin{aligned}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)&\le H\left(\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\mathscr{A})\right)\vee\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\mathscr{B})\right)\right)\\&=H\left(\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\mathscr{B})\right)\vee\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\mathscr{A})\right)\right)\\&=H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\mathscr{B})\right)+H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\mathscr{A})\middle|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\mathscr{B})\right)\end{aligned}$$

Diperoleh :

$$H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)\le H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)+H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\middle|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)$$

$$\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)\le\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)+H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\middle|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)&\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Bigg(H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)\\&\qquad+H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\middle|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)\Bigg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)&\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)\\&\quad+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\middle|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)\end{aligned}$$

$$h(T,\mathscr{A})\le h(T,\mathscr{B})+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\middle|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right) \qquad (1)$$

selanjutnya dinamakan persamaan (1)

Pada sisi lain, karena

$$H(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}|\mathscr{D})\le H(\mathscr{A}|\mathscr{D})+H(\mathscr{B}|\mathscr{D}),$$

maka

$$\begin{aligned}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\middle|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)&\le\sum_{i=0}^{n-1}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\middle|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)\\&\le\sum_{i=0}^{n-1}H\left(T^{-i}\mathscr{A}\middle|T^{-i}\mathscr{B}\right)\\&\le\sum_{i=0}^{n-1}H(\mathscr{A}|\mathscr{B})\\&\le nH(\mathscr{A}|\mathscr{B})\end{aligned} \qquad (2)$$

selanjutnya dinamakan persamaan (2)

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh

$$h(T,\mathscr{A})\le h(T,\mathscr{B})+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\middle|\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{B}\right)$$

$$h(T,\mathscr{A})\le h(T,\mathscr{B})+H(\mathscr{A}|\mathscr{B}) \qquad \blacksquare$$

v. Akan ditunjukkan

$$h(T,T^{-1}\mathscr{A})=h(T,\mathscr{A})$$

Bukti:
Diketahui

$$H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\mathscr{A}\right)=H\left(\mathscr{A}\vee T^{-1}\mathscr{A}\vee T^{-2}\mathscr{A}\vee\ldots\vee T^{-(n-1)}\mathscr{A}\right)$$

Karena

$$H(T^{-1}\mathscr{A})=H(\mathscr{A})$$

maka

$$H\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right) = H\left(\mathscr{A} \vee T^{-1}\mathscr{A} \vee T^{-2}\mathscr{A} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathscr{A}\right)$$

$$= H\left(T^{-1}\left(\mathscr{A} \vee T^{-1}\mathscr{A} \vee T^{-2}\mathscr{A} \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\mathscr{A}\right)\right)$$

$$= H\left(T^{-1}\mathscr{A} \vee T^{-2}\mathscr{A} \vee T^{-3}\mathscr{A} \vee \ldots \vee T^{-n}\mathscr{A}\right)$$

$$H\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right) = H\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$h(T,\mathscr{A}) = h\left(T, T^{-1}\mathscr{A}\right) \quad \blacksquare$$

vi. Akan ditunjukkan bahwa

$$h(T,\mathscr{A}) = h\left(T, \vee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\mathscr{A}\right), k \geq 1$$

Bukti :

$$h\left(T, \overset{k}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{n-1}{\underset{j=0}{\vee}} T^{-j}\left(\overset{k}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{k+n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{k+n-1}{n}\right)H\left(\overset{k+n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k+n-1}{n}\right)\frac{1}{k+n-1}H\left(\overset{k+n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$= h(T,\mathscr{A})$$

$$h(T,\mathscr{A}) = h\left(T, \vee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\mathscr{A}\right) \quad \blacksquare$$

vii. Akan dibuktikan bahwa

$h(T,\mathscr{A}) = h\left(T, \overset{k}{\underset{i=k}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$ jika T terinvers dan $k \geq 1$

Bukti :

$$h\left(T, \overset{k}{\underset{i=-k}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right) = h\left(T, T^{-1} \overset{k}{\underset{i=-k}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$= h\left(T, \overset{k}{\underset{i=-k}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{n-1}{\underset{j=0}{\vee}} T^{-j}\left(\overset{k}{\underset{i=-k}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{2k+n-1}{\underset{i=-k}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2k+n-1}{n}\right)\left(\frac{1}{2k+n-1}\right).\left(\overset{2k+n-1}{\underset{i=-k}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$= h(T,\mathscr{A})$$

Terbukti $h(T,\mathscr{A}) = h\left(T, \overset{k}{\underset{i=k}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$

Akibat 1.

Jika $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ adalah sub-aljabar dari B maka $\left|h(T,\mathscr{A}) - h(T,\mathscr{B})\right| \leq d(\mathscr{A},\mathscr{B})$, dengan demikian $h(T,\bullet)$ adalah fungsi bernilai real yang kontinu pada ruang metrik (∇, d).

Bukti:

Berdasarkan teorema sebelumnya diketahui bahwa

$$h(T,\mathscr{A}) \leq h(T,\mathscr{B}) \leq H\left(\mathscr{A}\middle|\mathscr{B}\right)$$

atau

$$h(T,\mathscr{A}) - h(T,\mathscr{B}) \leq H\left(\mathscr{A}\middle|\mathscr{B}\right) \qquad (3)$$

Selanjutnya dinamakan (3)sedangkan

$$h(T,\mathscr{B}) \leq h(T,\mathscr{A}) + H\left(\mathscr{B}\middle|\mathscr{A}\right)$$

$$h(T,\mathscr{A}) - h(T,\mathscr{B}) \geq -H\left(\mathscr{B}\middle|\mathscr{A}\right) \qquad (4)$$

selanjutnya dinamakan (4)

Berdasarkan (3) dan (4) diperoleh

$$\left|h(T,\mathscr{A})\right| - \left|h(T,\mathscr{B})\right|$$

$$\leq \max\left\{H\left(\mathscr{A}\middle|\mathscr{B}\right), H\left(\mathscr{B}\middle|\mathscr{A}\right)\right\}$$

$$\leq H\left(\mathscr{A}\middle|\mathscr{B}\right), H\left(\mathscr{B}\middle|\mathscr{A}\right)$$

$$= d(\mathscr{A},\mathscr{B}) \quad \blacksquare$$

Terbukti

$$h(T,\mathscr{A}) \leq h(T,\mathscr{B}) \leq H\left(\mathscr{A}\middle|\mathscr{B}\right)$$

Teorema 2.

Andaikan T merupakan transformasi mengawetkan ukuran atas ruang probabilitas $(X,\mathscr{B},m)$.

i. $h\left(T^k\right) = kh(T)$, untuk $k > 0$

ii. Jika T dapat dibalikkan atau terinvers maka $h\left(T^k\right) = |k|h(T), \quad \forall k \in Z$.

Bukti :

i. Akan ditunjukkan bahwa

$$h\left(T^k\right) = kh(T) \text{ untuk } k > 0.$$

Bukti:

Langkah pertama harus ditunjukkan bahwa

$$kh(T) \leq h\left(T^k\right)$$

diketahui bahwa

$$h\left(T^k\right) = \sup h\left(T^k, \overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

sehingga untuk $k > 0$,

$$h\left(T^k, \overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-k}\left(\overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}}\left(T^{-i}\mathscr{A}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{k}{k}H\left(\overset{nk-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{k}{nk}H\left(\overset{nk-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$

$$= kh(T,\mathscr{A})$$

$$= kh(T)$$

hal ini berarti

$$kh(T)=k\sup h(T,\mathscr{A}),\ \mathscr{A}\ \text{berhingga}$$
$$=\sup h\left(T^k \overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$
$$\le \sup h\left(T^k,b\right)=h\left(T^k\right)$$

dengan kata lain

$$kh(T)\le h\left(T^k\right) \qquad (5)$$

Selanjutnya dinamakan (5), sedangkan

$$h\left(T^k,\mathscr{A}\right)\le h\left(T^k \overset{k-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$
$$=kh(T,\mathscr{A})$$
$$\sup h\left(T^k,\mathscr{A}\right)\le \sup kh(T,\mathscr{A})$$
$$=k\sup h(T,\mathscr{A})$$

dengan kata lain

$$h\left(T^k\right).\le kh(T) \qquad (6)$$

selanjutnya dinamakan (6), berdasarkan (5) dan (6) ,

$$h\left(T^k\right)=kh(T),\ \text{untuk}\ k>0$$

ii. Akan ditunjukkan jika T terinvers maka $h\left(T^k\right)=|k|h(T),\quad \forall k\in Z$.

Bukti:

Cukup ditunjukkan bahwa

$$h\left(T^{-1}\right)=h(T),\ \text{karena}\ H\left(T^{-1},\mathscr{A}\right)=H(\mathscr{A})$$

berarti

$$h\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{i}\mathscr{A}\right)=H\left(T^{-(n-1)} \overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{i}\mathscr{A}\right)$$
$$=H\left(\overset{n-1}{\underset{j=0}{\vee}} T^{-j}\mathscr{A}\right)$$

sehingga

$$H\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}}\left(T^{-1}\right)^{-i}\mathscr{A}\right)=H\left(\overset{n-1}{\underset{j=0}{\vee}} T^{-j}\mathscr{A}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}}\left(T^{-1}\right)^{-i}\mathscr{A}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{n-1}{\underset{j=0}{\vee}} T^{-j}\mathscr{A}\right)$$
$$h\left(T^{-1},\mathscr{A}\right)=h(T,\mathscr{A})$$
$$\sup h\left(T^{-1},\mathscr{A}\right)=\sup h(T,\mathscr{A})$$
$$h\left(T^{-1}\right)=h(T)$$
$$\therefore h\left(T^k\right)=|k|h(T),\quad \forall k\in Z$$

Terbukti jika T terinvers maka

$$h\left(T^k\right)=|k|h(T),\quad \forall k\in Z$$

Teorema 3.

Jika $\mathscr{A}$ sub-aljabar berhingga dari $\mathscr{B}$ dan T adalah transformasi mengawekan ukuran dari $(X,\mathscr{B},m)$ maka

$$h(T,\mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}H\left(\mathscr{A}\left|\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)\right.\right)=H\left(\mathscr{A}\left|\overset{\infty}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right.\right)$$

Bukti :

$$h(T,\mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)$$
$$H\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)=H(\mathscr{A})+\sum_{j=1}^{n-1}H\left(\mathscr{A}\left|\left(\overset{j}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)\right.\right)$$
$$=H(\mathscr{A})+H\left(\mathscr{A}\left|\left(\overset{1}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)\right.\right)+H\left(\mathscr{A}\left|\left(\overset{2}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)\right.\right)+$$
$$\ldots+H\left(\mathscr{A}\left|\left(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)\right.\right)$$
$$=nH\left(\mathscr{A}\left|\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)\right.\right)$$

Selanjutnya dipenuhi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\overset{n-1}{\underset{i=0}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nH\left(\mathscr{A}\left|\overset{j}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right.\right)\right)$$
$$h(T,\mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}H\left(\mathscr{A}\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right.\right)$$
$$=H\left(\mathscr{A}\left|\overset{\infty}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right.\right) \qquad \blacksquare$$

Akibat 2.

Diberikan T adalah transformasi mengawetkan ukuran atas ruang probabilitas $(X,\mathscr{B},m)$. Diberikan $\mathscr{A}$ sub-aljabar yang berhingga pada $\mathscr{B}$, maka $h(T,\mathscr{A})=0$ untuk setiap $\mathscr{A}\overset{\circ}{\subset}\vee_{i=1}^{\infty}T^{-i}\mathscr{A}$.

Bukti :

Diketahui dari Teorema 4.

i. $H\left(\mathscr{A}\middle|\mathscr{F}\right)=0\Leftrightarrow\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$

ii. $H\left(\mathscr{A}\middle|\mathscr{F}\right)=H(\mathscr{A})\Leftrightarrow\mathscr{A}$ dan $\mathscr{F}$ independen

Dan berdasarkan Teorema 3. diperoleh

$$H(T,\mathscr{A})=0\Leftrightarrow H\left(\mathscr{A}\left|\overset{\infty}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}\right.\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\mathscr{A}\subset\overset{\infty}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A}$$

Dengan kata lain

$$H(T,\mathscr{A})\Leftrightarrow\mathscr{A}\subset\overset{\infty}{\underset{i=1}{\vee}} T^{-i}\mathscr{A} \qquad \blacksquare$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa konsep entropi dari transformasi mengawetkan ukuran menghasilkan beberapa sifat-sifat entropi transformasi mengawetkan ukuran. Adapun beberapa kesimpulan yang dapat diambil berupa :

1. Transformasi mengawetkan ukuran T dimana $T:(X_1,\mathscr{B}_1,m_1)\to(X_2,\mathscr{B}_2,m_2)$ dan $(X_1,\mathscr{B}_1,m_1)$, $(X_2,\mathscr{B}_2,m_2)$ merupakan ruang probabilitas maka sifat mengawetkan ukuran bergantung pada setiap $\mathscr{B}$ dan setiap m.
2. Diberikan T adalah transformasi mengawetkan ukuran atas ruang probabilitas $(X,\mathscr{B},m)$. Diberikan

$\mathscr{A}$ sub-aljabar yang berhingga pada $\mathscr{B}$, maka $h(T,\mathscr{A}) = 0$ untuk setiap $\mathscr{A} \overset{\circ}{\subset} \vee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\mathscr{A}$.

3. Jika $\mathscr{A},\mathscr{B}$ adalah sub-aljabar dari B maka $|h(T,\mathscr{A}) - h(T,\mathscr{B})| \leq d(\mathscr{A},\mathscr{B})$, jadi $h(T,\mathscr{A})$ adalah fungsi bernilai real yang kontinu pada ruang metrik (∇, d).

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G & Sherbert, D.R, 1994.Introduction to real analysis. Second Edition. John Wiley & Sons. Inc, New York.

Papoulis, A, 1984. *Probility, Random Variables, and Stochastic Processe,* Second Edition. Polytechnic Institute Of New York.

Soemantri, R, 1988. Analisis Real I. Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.

Tolman, R. C, 2001. The Principles of Statistical Mechanics, 19 Oktober 2006, http://www.tim-thompson.com/entropy1.html#stat, Pkl 14:34.

Walters, P, 1981. An Introduction to Ergodic Theory, Mathematics Institute University of Warwick, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.

Weisstein, E. W, 1999. Ergodic Theory, 19 Oktober 2006, http://mathworld.wolfram.com/ErgodicTheory.html, Pkl 14:25